

1-маъруза

Мавзу: Тўпламлар. Тўпламлар устида амаллар

1⁰. Тўплам тушунчаси. Тўплам математиканинг бошлан-ғич, айти пайтда муҳим тушунчаларидан бири. Уни ихтиёрий табиатли нарсаларнинг (предметларнинг) маълум белгилар бўйича бирлашмаси (мажмуаси) сифатида тушунилади. Масалан, жавондаги китоблар тўплами, бир нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар тўплами, $x^2 - 5x + 6 = 0$ тенгламанинг илдизлари тўплами дейилиши мумкин.

Тўпламни ташкил этган нарсалар **унинг элементлари** дейилади.

Математикада тўпламлар бош харфлар билан, уларнинг элементлари эса кичик харфлар билан белгиланади. Масалан, A, B, C - тўпламлар, a, b, c - тўпламнинг элементлари.

Баъзан тўпламлар уларнинг элементларини кўрсатиш билан ёзилади:

$$A = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12 \},$$

$$N = \{ 1, 2, 3, \dots, n, \dots \},$$

$$Z = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}.$$

Агар a бирор A тўпламнинг элементи бўлса, $a \in A$ каби ёзилади ва « a элемент A тўпламга тегишли » деб ўқилади. Агар a шу тўпламга тегишли бўлмаса, уни $a \notin A$ каби ёзилади ва « a элемент A тўпламга тегишли эмас » деб ўқилади. Масалан, юқоридаги A тўпламда $10 \in A, 15 \notin A$.

Агар A чекли сондаги элементлардан ташкил топган бўлса, у **чекли тўплам**, акс ҳолда **чексиз тўплам** дейилади. Масалан, $A = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12 \}$ чекли тўплам, бир нуқтадан ўтувчи барча тўғри чизиқлар тўплами эса чексиз тўплам бўлади.

1-таъриф. A ва B тўпламлари берилган бўлиб, A тўпламнинг барча элементлари B тўпламга тегишли бўлса, A тўплам B нинг қисми (қисмий тўплам) дейилади ва

$$A \subset B \text{ (ёки } B \supset A)$$

каби ёзилади.

A тўпламнинг элементлари орасида бирор хусусиятга (бу хусусиятни P билан белгилаймиз) эга бўладиганлари бўлиши мумкин. Бундай хусусиятли элементлардан тузилган тўплам қуйидагича

$$\{x \in A \mid P\}$$

белгиланади. Равшанки,

$$\{x \in A \mid P\} \subset A$$

бўлади.

Агар A тўплам элементлари орасида P хусусиятли элементлар бўлмаса, у ҳолда

$$\{x \in A \mid P\}$$

битта ҳам элементга эга бўлмаган тўплам бўлиб, уни **бўш тўплам** дейилади. Бўш тўплам $\emptyset$ каби белгиланади. Масалан, $x^2 + x + 1 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларидан иборат A бўш тўплам бўлади:

$$\emptyset = \{x \in A \mid x^2 + x + 1 = 0\}.$$

Ҳар қандай A тўплам учун

$$A \subset A, \emptyset \subset A$$

деб қаралади.

Одатда, A тўпламнинг барча қисмий тўпламларидан иборат тўплам $F(A)$ каби белгиланади. Масалан, $A = \{a, b, c\}$ тўплам учун

$$F(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \emptyset\}$$

бўлади.

2-таъриф. A ва B тўпламлари берилган бўлиб,

$$A \subset B, B \subset A$$

бўлса, A ва B бир бирига **тенг тўпламлар** дейилади ва

$$A = B$$

каби ёзилади.

Демак, $A = B$ тенглик A ва B тўпламларнинг бир хил элементлардан ташкил топганлигини билдиради.

2⁰. Тўпламлар устида амаллар. Икки A ва B тўпламлар берилган бўлсин.

3-таъриф. A ва B тўпламларнинг барча элементларидан ташкил топган E тўплам A ва B тўпламлар **йиғиндиси (бирлашмаси)** дейилади ва $A \cup B$ каби белгиланади:

$$E = A \cup B.$$

Демак, бу ҳолда $a \in A \cup B$ дан $a \in A$, ёки $a \in B$, ёки бир вақтда $a \in A$, $a \in B$ бўлиши келиб чиқади.

4-таъриф. A ва B тўпламларнинг барча умумий элементларидан ташкил топган F тўплам A ва B тўпламлар **кўпайтмаси (кесишмаси)** дейилади ва $A \cap B$ каби белгиланади:

$$F = A \cap B.$$

Демак, бу ҳолда $a \in A \cap B$ дан бир вақтда $a \in A$, $a \in B$ бўлиши келиб чиқади.

5-таъриф. A тўпламнинг B тўпламга тегишли бўлмаган барча элементларидан ташкил топган G тўплам A тўпламдан B тўпламнинг **айирмаси** дейилади ва $A \setminus B$ каби белгиланади:

$$G = A \setminus B.$$

Демак, $a \in A \setminus B$ дан $a \in A$, $a \notin B$ бўлиши келиб чиқади.

6-таъриф. A тўпламнинг B га тегишли бўлмаган барча элементларидан ва B тўпламнинг A га тегишли бўлмаган барча элементларидан тузилган тўплам A ва B тўпламлар-нинг **симметрик айирмаси** дейилади ва $A \Delta B$ каби белгиланади:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Демак, $a \in A \Delta B$ бўлишидан $a \in A$, $a \notin B$ ёки $a \in B$, $a \notin A$ бўлиши келиб чиқади.

7-таъриф. Айтайлик, $a \in A$, $a \in B$ бўлсин. Барча тартибланган (a, b) кўринишидаги жуфтликлардан тузилган тўплам A ва B тўпламларнинг **декарт кўпайтмаси** дейилади ва $A \times B$ каби белгиланади. Демак,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Хусусан, $A = B$ бўлганда $A \times A = A^2$ деб қаралади.

8-таъриф. Айтайлик, S ва A тўпламлар берилган бўлиб, $A \subset S$ бўлсин. Ушбу

$$S \setminus A$$

тўплам A тўпламни S га **тўлдирувчи тўплам** дейилади ва CA ёки $C_S A$ каби белгиланади:

$$CA = S \setminus A.$$

Тўпламлар устида бажариладиган амалларнинг баъзи хоссаларини келтирамыз.

A, B ва D тўпламлари берилган бўлсин.

- 1) $A \subset B, B \subset D$ бўлса, $A \subset D$ бўлади;
- 2) $A \cup A = A, A \cap A = A$ бўлади;
- 3) $A \subset B$ бўлса, $A \cup B = B, A \cap B = A$ бўлади;
- 4) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$ бўлади;
- 5) $(A \cup B) \cup D = A \cup (B \cup D), (A \cap B) \cap D = A \cap (B \cap D)$ бўлади;
- 6) $A \subset S$ бўлса, $A \cap CA = \emptyset$;
- 7) $C(A \cup B) = CA \cap CB$, бунда $A \subset S, B \subset S$;
- 8) $C(A \cap B) = CA \cup CB$, бунда $A \subset S, B \subset S$.

Бу хоссаларнинг исботи юқорида келтирилган таъриф-лардан келиб чиқади.

1-мисол. Ушбу

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \quad (1)$$

тенглик исботлансин.

◀ $a \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ бўлсин. У ҳолда

$$a \in (A \setminus B): a \in A, a \notin B$$

ёки

$$a \in (B \setminus A): a \in B, a \notin A$$

бўлади. Бундан эса

$$a \in (A \cup B), a \notin (A \cap B)$$

бўлиб,

$$a \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B). \quad (2)$$

Айтайлик, $a \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ бўлсин.

У ҳолда

$$a \in (A \cup B): a \in A \text{ ёки } a \in B,$$

$$a \notin (A \cap B): a \notin A, a \notin B \text{ ёки } a \in A, a \notin B \text{ ёки } a \notin A, a \in B$$

бўлади.

Бундан эса

$$a \in A \setminus B \text{ ёки } a \in B \setminus A$$

бўлиб,

$$a \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \quad (3)$$

(2) ва (3) муносабатлардан (1) тенгликнинг ўринли бўлиши топилади. ►

Тўпламлар устида бажариладиган амалларни баён этишда тўпламларнинг қандай табиатли элементлардан тузил-ганлигига эътибор қилинмади.

Аслида, келтирилган амаллар бирор универсал тўплам деб аталувчи тўпламнинг қисмий тўпламлари устида бажарилади деб қаралади. Масалан, натурал сонлар тўпламлари устида амаллар бажариладиган бўлса, универсал тўплам сифатида барча натурал сонлардан иборат N тўпламни олиш мумкин.

3⁰. Математик белгилар. Математикада тез-тез учрайди-ган сўз ва сўз бирикмалари ўрнида махсус белгилар ишлати-лади. Улардан мухимларини келтирамиз:

- 1) «агар ... бўлса, у ҳолда ... бўлади» ибораси « $\Rightarrow$ » белги орқали ёзилади;
- 2) икки иборанинг эквивалентлиги ушбу « $\Leftrightarrow$ » белги орқали ёзилади;
- 3) «ҳар қандай», «ихтиёрий», «барчаси учун» сўзлари ўрнига « $\forall$ » белги ишлатилади;
- 4) «мавжудки», «топиладики» сўзлари ўрнига « $\exists$ » мавжудлик белгиси ишлатилади.

Машқлар

1. Ушбу

$$(A \cup B) \setminus D = (A \setminus D) \cup (B \setminus D)$$

тенглик исботлансин.

2. Агар A ва B чекли тўпламлар бўлиб, уларнинг элементлари сони мос равишда $n(A)$, $n(B)$ бўлса,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

бўлиши исботлансин.

3. Агар A чекли тўплам бўлиб, унинг элементларининг сони n га тенг бўлса, бу тўпламнинг барча қисмий тўпламлари тўплами $F(A)$ нинг элементлари сони 2^n га тенг экани исботлансин.

4. Агар $A = \{a, b\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ бўлса, A тўпламнинг B тўпламга акслантиришлари сони 9 га тенг бўлиши исботлансин.

5. Айтайлик, A саноқли тўплам бўлиб, $x \notin A$ бўлсин. У ҳолда $A \cup \{x\} \sim A$ бўлиши исботлансин.